数理解析研究所講究録
第 1643 巻 2009 年 38-42

ベルジュの最大値定理の逆について
(On Inverse of the Berge Maximum Theorem)

慶應義塾大学商学部 小宮英敏 (Hidetoshi Komiya)
Faculty of Business and Commerce, Keio University

本稿では経済理論で頻繁に登場するベルジュの最大値定理の逆問題についてその発端から最近の結果までの解説を行なう．ベルジュの最大値定理は，連続多価写像を制約条件としてその制約下での連続関数の最大値が連続に変化し，最大値を達成する点の集合が上半連続に変化することを主張する定理である．この最大値定理にはいくつかのバージョンが存在するが，本稿で取り上げるそれはその最大値が考察される連続関数が準凹性をもつときのものである．具体的に明示する．

定理 1 [Berge] X を位相空間とし，Y を線形位相空間の凸部分集合とする．多価写像 $S : X \twoheadrightarrow Y$ はコンパクト値かつ凸値で連続とする．実数値関数 $u : X \times Y \to R$ は連続であり，第 2 変数に関し準凹であるとする．このとき，

$$m(x) = \max_{z \in S(x)} u(x, z), \quad x \in X$$

で定義される最大値関数 $m : X \to R$ は連続であり，

$$K(x) = \{y \in S(x) : u(x, y) = m(x)\}, \quad x \in X$$

で定義される最大値点多価写像 $K : X \twoheadrightarrow Y$ は凸値上半連続である．

最大値点多価写像 K が凸値上半連続であるというこのベルジュの最大値定理の結論を仮定として読み替え，この性質をもつ多価写像に対し第 2 変数に関し準凹である連続 2 変数関数 u をみつけ，その最大値点として K を表わすことができなかという問題を Komiya[2] は考察した．具体的には以下の問題を提起した．

X を位相空間とし，Y を線形位相空間の凸集合とする．多価写像 $S : X \twoheadrightarrow Y$ はコンパクト値かつ凸値で連続とする．多価写像 $K : X \twoheadrightarrow Y$ はすべての $x \in X$ に対し $K(x) \subset S(x)$ を満たし凸値で上半連続であるとする．このとき，以下の性質を満たす連続な 2 変数関数 $u : X \times Y \to R$ は存在するだろうか？

(i) すべての $x \in X$ に対し $K(x) = \{y \in S(x) : u(x,y) = \max_{z \in S(x)} u(x,z)\}$ が成立する.

(ii) すべての $x \in X$ に対し $u(x,y)$ は y に関し準凹である.

これは抽象的な多価写像を具体的に 2 変数実数値関数の最大値点の集合の写像としてとらえるという表現定理が成立するか否かを問うている問題とも解釈することができる.

この問題は [2] において，有限次元の設定では肯定的に解かれることが示された．それは以下の定理である.

定理 2 [Komiya] X をユークリッド空間 R^l の部分集合とし，X 上で定義されユークリッド空間 R^m を値域とする多価写像 $K : X \twoheadrightarrow R^m$ はコンパクト値かつ凸値で上半連続であるとする．このとき，以下の性質を満たす連続関数 $v : X \times R^m \to [0,1]$ が存在する.

(i) すべての $x \in X$ に対し，$K(x) = \{y \in R^m : v(x,y) = \max_{z \in R^m} v(x,z)\}$ が成立する.

(ii) すべての $x \in X$ に対し，$v(x,y)$ は y に関し準凹である.

そして，この定理の応用し有限次元に限定はされるが，Fan-Browder の不動点定理を前提として角谷の不動点定理を簡単に導いてみせた.

その後定理 2 を無限次元空間の場合に拡張することが試みられた．Park and Komiya[3] によりその最初の結果がえられた.

定理 3 [Park and Komiya] X を位相空間とし，Y をその球が凸である距離線形位相空間とする．そして，多価写像 $K : X \twoheadrightarrow Y$ は σ-選択可能とする．このとき，以下の性質を満たす連続関数 $v : X \times Y \to [0,1]$ が存在する.

(i) すべての $x \in X$ に対し，$K(x) = \{y \in Y : v(x,y) = \max_{z \in Y} v(x,z)\}$ が成立する.

(ii) すべての $x \in X$ に対し，$v(x,y)$ は y に関し準凸である.

定理 3 では K が σ-選択可能であるという新たな仮定が付け加わっている．K が σ-選択可能であるとは以下のように定義される.

位相空間 X から線形位相空間の部分集合 Y への多価写像 $K : X \twoheadrightarrow Y$ が σ-選択可能であるとは，以下の性質を満たす多価写像 $K_n : X \twoheadrightarrow Y$ の列 $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ が存在することをいう.

1. すべての n に対し K_n はコンパクト値かつ凸値で連続である.

2. すべての n とすべての x に対し $K_{n+1}(x) \subset K_n(x)$ が成立する.
3. すべての x に対し $K(x) = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n(x)$ である.

有限次元におけるコンパクト値かつ凸値である上半連続写像は σ-選択可能性を満たすことは知られており，その意味で定理 3 は定理 2 の拡張となっている．しかし，この σ-選択可能性の定義をみるとわかるようにかなり限定的なものであることは否定できない．

この線上の議論として Aoyama[1] によるものがある．

定理 4 [Aoyama] X を距離空間とし，(Y, d, W) を性質 (K) をもつ凸距離空間とする．そして，多価写像 $K : X \twoheadrightarrow Y$ は σ-選択可能であるとする．このとき，以下の性質を満たす連続関数 $v : X \times Y \to [0, 1]$ が存在する．

(i) すべての $x \in X$ に対し，$K(x) = \{y \in Y : v(x, y) = \max_{z \in Y} v(x, z)\}$ が成立する．

(ii) すべての $x \in X$ に対し，y に関し $v(x, y)$ は準凸である．

定理 4 における凸距離空間の概念とその性質 (K) について注釈が必要だろう．凸距離空間は Takahashi[4] によって導入された概念であり距離空間で凸性を扱うための最小限の構造を考慮した空間である．距離空間 (Y, d) において，写像 $W : Y \times Y \times [0, 1] \to Y$ が存在し，任意の $(x, y, \lambda) \in Y \times Y \times [0, 1]$ と $z \in Y$ に対し不等式

$$d(z, W(x, y, \lambda)) \leq \lambda d(z, x) + (1 - \lambda) d(z, y)$$

が成立するとき，W は (Y, d) における凸構造であるという．これは通常の線形空間における点 x と y とを $(1 - \lambda) : \lambda$ に内分する点に相当する点を $W(x, y, \lambda)$ と表わしており，内分と距離との整合性を要請しがものが上記の不等式である．そして，凸構造 W を伴った距離空間 (Y, d) は凸距離空間とよばれ (Y, d, W) と表される．凸距離空間においては通常の線形空間と同じように凸集合を自然に定義することができる．凸距離空間 (Y, d, W) の部分集合 C は，任意の $x, y \in C$ と $\lambda \in [0, 1]$ に対し $W(x, y, \lambda) \in C$ が成立するとき凸集合であるという．そして，凸距離空間の凸部分集合 C 上で定義された実数値関数 $f : C \to R$ はその上方レベル集合 $\{x \in C : f(x) > \alpha\}$ がすべての実数 α に対し凸集合であるとき準凹であるという．また，凸距離空間 (Y, d, W) は，任意の $x, y, x', y' \in Y$ と $\lambda \in [0, 1]$ に対し不等式

$$d(W(x, y, \lambda), W(x', y', \lambda)) \leq \lambda d(x, x') + (1 - \lambda) d(y, y')$$

が成立するとき性質 (K) をもつという．

さて，定理 3 も定理 4 も定理 2 の無限次元への拡張となってはいるが，σ-選択可能性という多価写像 K に対する仮定を取り除くには至っていない．しかし，最近 σ-選択可能性を仮定せずに自然な形で無限次元の場合にもベルジュの最大値定理の逆が成立することが Yamauchi[5] によって証明された．それを以下に記す．

定理 5 [Yamauchi] X をパラコンパクト位相空間とし，Y を局所凸線形位相空間とする．多価写像 $K : X \twoheadrightarrow Y$ は上半連続であり，そのグラフ $\mathrm{Gr}K$ が $X \times Y$ の G_δ 集合であるとする．このとき，以下の性質を満たす連続関数 $v : X \times Y \to [0,1]$ が存在する．

(i) 任意の $x \in X$ に対し，$K(x) = \{y \in Y : v(x,y) = \max_{z \in Y} v(x,z)\}$ が成立する．

(ii) 任意の $x \in X$ に対し，$v(x,y)$ は y について準凹である．

最後の注意として，定理 5 では K のグラフ $\mathrm{Gr}K$ が G_δ 集合であるという仮定がおかれている．しかし，これは定理の適用範囲を狭めるものではなく，定理 5 が成立するためには必然的に成立しなくてはならない性質であることが以下のようにして分る．定理 5 が成立しているとして，$m(x) = \max_{z \in Y} v(x,z)$ と関数 m を定義すると，以下の等式が成立する．

$$\begin{aligned}\mathrm{Gr}K &= \{(x,y) : v(x,y) = m(x)\}\\ &= \{(x,y) : v(x,y) \geq m(x)\}\\ &= \bigcap_{n=1}^{\infty}\{(x,y) : v(x,y) > m(x) - \frac{1}{n}\}\end{aligned}$$

そして，定理 1 より m は連続となるので，$\mathrm{Gr}K$ は G_δ 集合である．

さらに σ-選択可能性についても以下の定理が [5] でえられている．

定理 6 X をパラコンパクト位相空間とし，Y を局所凸線形位相空間とする．多価写像 $K : X \twoheadrightarrow Y$ は上半連続であり，そのグラフ $\mathrm{Gr}K$ が $X \times Y$ の G_δ 集合であるとする．このとき，K は σ-選択可能である．

参考文献

[1] K. Aoyama, “Inverse of the Berge maximum theorem in convex metric spaces,” Sci. Math. Jpn. 58(2003), 541–546.

[2] H. Komiya, “Inverse of the Berge maximum theorem,” Econ. Th. 9(1997), 371–375.

[3] S. Park and H. Komiya, "Another inverse of the Berge maximum theorem," J. Nonlinear Convex Anal. 2(2001), 105–109.

[4] W. Takahashi, "A convexity in metric space and nonexpansive mappings", Kōdai Math. Sem. Rep. 22(1970), 142–149.

[5] T. Yamauchi, "An inverse of the Berge maximum theorem for infinite dimensional spaces," J. Nonlinear Convex Anal. 9(2008), 161–167.